

HEC Montréal

**Validation de modèles: Adéquation des lois de distributions et
Backtests de la VaR et de la CVaR**

Par

Ramata Ly

**Sciences de la gestion
(Spécialisation en Finance de Marché)**

Projet de recherche présenté en vue de l'obtention du grade de
maîtrise ès sciences
[M. Sc]

Sous la direction de **Georges Dionne**

Décembre 2023
© Ramata Ly, 2023

Résumé

Le comité de Bâle a décidé en 2016 que le backtest des modèles se ferait avec la VaR au degré de confiance de 99%, et que le capital de couverture du risque de marché serait calculé avec la CVaR au degré de confiance 97,5%. Tel que suggéré par Bâle, il est important de s'assurer de l'adéquation des modèles utilisés pour les mesures de risque en implémentant les procédures nécessaires. Nous testons la validité de trois modèles paramétriques choisis (une normale, une Student t, et un mélange de deux normales) en utilisant le processus de validation proposé par Hassani et Dionne (2023). Après avoir effectué quelques analyses pour déterminer la ou les distributions qui représentent mieux les données, nous procédons à différents *backtests* pour terminer le processus de validation. Nous trouvons que la Student t et le mélange de deux lois normales performant mieux que la distribution normale et que les distributions qui représentent mieux les données ont de meilleurs résultats aux backtests.

Table des matières

Résumé.....	4
Liste des tableaux.....	7
Liste des figures.....	6
1 Introduction.....	9
2 Données	10
3 Analyse préliminaire	11
4 Méthodologie	14
4.1 Estimation de la VaR	14
4.1.1 Méthode non paramétrique	13
4.1.2 Méthode paramétrique	15
4.2 Estimation de la CVaR.....	16
4.2.1 Méthode non paramétrique	16
4.2.2 Méthode paramétrique	17
4.3 Estimation des coefficients des modèles paramétriques	17
4.4 Backtest des VaRs	18
4.4.1 Test de couverture non conditionnelle	18
4.4.2 Test de couverture conditionnelle	19
4.5 Backtest des CVaRs	20
4.5.1 Backtest d'Acerbi et Szekely (2017).....	20
4.5.2 Backtest de Righi et Ceretta (2015).....	21
5 Résultats	21
5.1 Estimation des paramètres des modèles paramétriques	21
5.2 Backtests des VaR et CVaR.....	23
6 Conclusion	24
7 Bibliographie	26

Liste des tableaux

Tableau 1: Matrices des corrélations, variances-covariances et moments non paramétriques.....	11
Tableau 2: Matrices des corrélations, variances-covariances et moments non-paramétriques.....	13
Tableau 3: Minimisation de la CVaR (modèle normal).....	14
Tableau 4: Mesures non paramétriques des VaR et CVaR	15
Tableau 5 : 1 Normale	22
Tableau 6: 1 Student t	23
Tableau 7 : 2 Normales.....	23
Tableau 8: Backtest des VaR et CVaR	23

1 Introduction

Jusqu'en 2016, la valeur à risque (VaR) était la mesure de risque utilisée pour gérer le risque de marché et favoriser la stabilité financière des banques. Cependant, la VaR présente une limite importante, qui est le non-respect de la propriété de sous-additivité, ce qui fait d'elle une mesure de risque non cohérente (Artzner et al., 1999). En 2016, le comité de Bâle a décidé que la valeur à risque conditionnelle (CVaR) serait maintenant utilisée pour déterminer le capital de couverture requis (*Basel Committee on Banking Supervision*, 2016).

La CVaR est une mesure de risque cohérente. Cependant, elle présente aussi un désavantage comparé à la VaR car elle n'est pas élicitable. D'après Acerbi et Szelesky (2017), l'élicitabilité est une des conditions pour qu'une mesure puisse être soumise au backtest. Néanmoins, des procédures de backtests ont été développées (voir section 4.5). Les *backtests* de la VaR demeurent cependant plus simples à implémenter.

Donc, même si le capital réglementaire est maintenant basé sur la CVaR à un degré de confiance de 97,5%, le *backtest* réglementaire est toujours basé sur la VaR à 99%.

La réglementation de Bale permet aux institutions financières d'utiliser des modèles internes pour gérer le risque de marché. Hendricks et Hirtle (1997) ont trouvé que l'utilisation de modèles internes permet aux banques d'obtenir un capital réglementaire qui reflète mieux leur exposition au risque de marché, et permet donc d'éviter un capital réglementaire excessif qui pourrait les désavantager. Cependant, ces modèles doivent être validés en suivant des procédures statistiques pour s'assurer de leur adéquation (BCBS 2016).

Le processus de validation utilisé provient de Hassani S. & Dionne G. (2023) qui analysent différents modèles et trouvent que le mélange de deux SEP3 (*Skewed Exponential Power type 3*) permet d'obtenir les meilleures prévisions conditionnelles de la VaR et de la CVaR. Nous nous limitons à l'analyse de trois distributions afin de déterminer la distribution qui représente mieux nos données et obtient de meilleurs résultats aux backtests de la VaR et de la CVaR.

La méthode paramétrique est l'une des méthodes utilisées pour estimer la VaR et la CVaR. Une distribution normale des données est souvent supposée tandis que cette dernière ne capture pas la nature leptokurtique des rendements financiers (Kawata et Kijima, 2007). Olson et Wu (2013) ont aussi démontré que les rendements financiers ont de larges queues et que la distribution t de Student est plus adéquate que la distribution

normale. Abad et Benito (2013) ont comparé plusieurs méthodes d'estimation de la VaR et ont conclu que la Student t obtient de meilleurs résultats lorsqu'un modèle de variance conditionnelle asymétrique (GARCH) est utilisé. Par ailleurs, Contreras (2015) a démontré qu'un mélange de deux lois normales permet d'obtenir de meilleures estimations de la VaR et de la CVaR, comparés à la distribution normale et à la méthode historique.

Nous allons comparer la loi normale, la loi Student t, et le mélange de deux lois normales afin de déterminer la distribution qui représente mieux les données et obtient les meilleurs résultats aux *backtests*. Pour se faire, nous allons d'abord comparer les VaR et CVaR de chaque modèle aux VaR et CVaR non paramétriques. Nous allons ensuite observer les critères de sélection AIC et BIC, puis comparer les moments supérieurs des modèles (asymétrie et kurtosis) à ceux des données. Enfin, nous utiliserons le test de Kolmogorov-Smirnov qui permettra de comparer les fonctions de répartition des modèles à la fonction de répartition empirique. La dernière étape de validation des modèles est le *backtest*. En complément du *backtest* réglementaire de la VaR à 99%, Bale suggère d'ajouter d'autres procédures statistiques afin de s'assurer de la validité des modèles (BCBS, 2016 et 2019). Nous allons donc, à titre complémentaire, effectuer le *backtest* de la VaR et de la CVaR à 97,5%, et le *backtest* de la VaR et de la CVaR à 95%.

Nous utilisons les données de trois institutions financières pour nos analyses: la Royal Bank of Canada (RBC), la Banque Scotia, et la compagnie d'assurance Sun Life, de 2007 à 2012 qui comprend la période de la « grande récession » de 2008.

Nous allons commencer par une présentation des données (section 2). Dans la section 3, nous allons procéder à une analyse préliminaire en trouvant les portefeuilles qui minimisent la VaR et la CVaR, et présenter quelques statistiques. Dans la section suivante, nous présentons notre méthodologie. Nous allons ensuite présenter les résultats de nos analyses à la section 5. La dernière section conclut.

2 Données

Nous avons choisi trois titres d'institutions financières qui sont la Banque Royale du Canada (RBC), la Banque Scotia et la compagnie d'assurance Sun Life. Les prix de clôture quotidiens et les dividendes sont extraits de WRDS (Compustat – Capital IQ) pour la période allant du 15 juin 2007 au 20 mars 2012, sur le NY stock Exchange (NYSE), pour un total de 1200 rendements quotidiens. Pour les analyses hors échantillons, la période débute le 16 juin 2006 et se termine le 20 mars 2012.

Les rendements quotidiens ont été calculés suivant la formule suivante :

$$R_{i,t} = \frac{P_{i,t} + D_{i,t} - P_{i,t-1}}{P_{i,t-1}}$$

où $R_{i,t}$, $P_{i,t}$, et $D_{i,t}$ représentent respectivement le rendement, le prix et le dividende du titre i à t et $P_{i,t-1}$ représente le prix du titre i à $t-1$.

Le tableau 1 ci-dessous montre quelques statistiques descriptives de nos données. Nous pouvons constater une forte corrélation positive entre les titres, une dispersion des valeurs similaires entre les deux banques RBC et Scotia, ainsi que des moyennes de rendements presque nulles en cette période de crise financière. Nous notons aussi une asymétrie négative pour Sun Life et Scotia et des kurtosis très élevés, ce qui témoigne d'une probabilité positive d'avoir des valeurs extrêmes négatives pour Sun Life et Scotia, et positives pour RBC. En cette période de crise financière, on s'attendrait à une asymétrie négative et un kurtosis élevé.

Tableau 1: Matrices des corrélations, variances-covariances et moments non paramétriques

	RBC	Sun Life	Scotia
RBC	1		
Sun Life	0,741586	1	
Scotia	0,879015	0,764637	1
RBC	0,000544		
Sun Life	0,000504	0,000848	
Scotia	0,000480	0,000521	0,000547
Moyenne	0,05064%	0,00450%	-0,00079%
Variance	0,000544	0,000848	0,000547
Asymétrie	0,30266	-0,02012	-0,52654
Kurtosis	9,96950	8,00381	9,82623

Nous pouvons aussi voir à la figure 1 l'histogramme des différents rendements comparés aux densités des distributions normale, Student t, et Kernel.

Nous observons que la distribution Student t capture mieux l'épaisseur des queues que la distribution normale, et se rapproche plus de la densité Kernel pour les trois titres.

3 Analyse préliminaire

Nous allons maintenant estimer le portefeuille optimal qui minimise la VaR relative à un degré de confiance de 95% ($p=5\%$) en supposant une distribution normale des rendements et une moyenne nulle. Notons ce portefeuille le portefeuille A.

L'exercice consiste donc à minimiser l'expression de la VaR relative suivante¹ :

$$\text{VaR}_r = -\sigma_{\text{portefeuille}} \times \Phi_0^{-1}(p) = -\sqrt{\beta^T \Sigma \beta} \times q_0 > 0$$

sous contrainte que les poids des trois titres somment à 1 et où :

- $\Phi_0^{-1}(p)$ est l'inverse de la fonction cumulative de la loi normale centrée réduite évaluée à p ¹
- β est le vecteur poids des titres et β^T sa transposée
- Σ est la matrice variance-covariance des rendements des titres
- q_0 est le quantile de la densité $N(0,1)$ relatif à p .

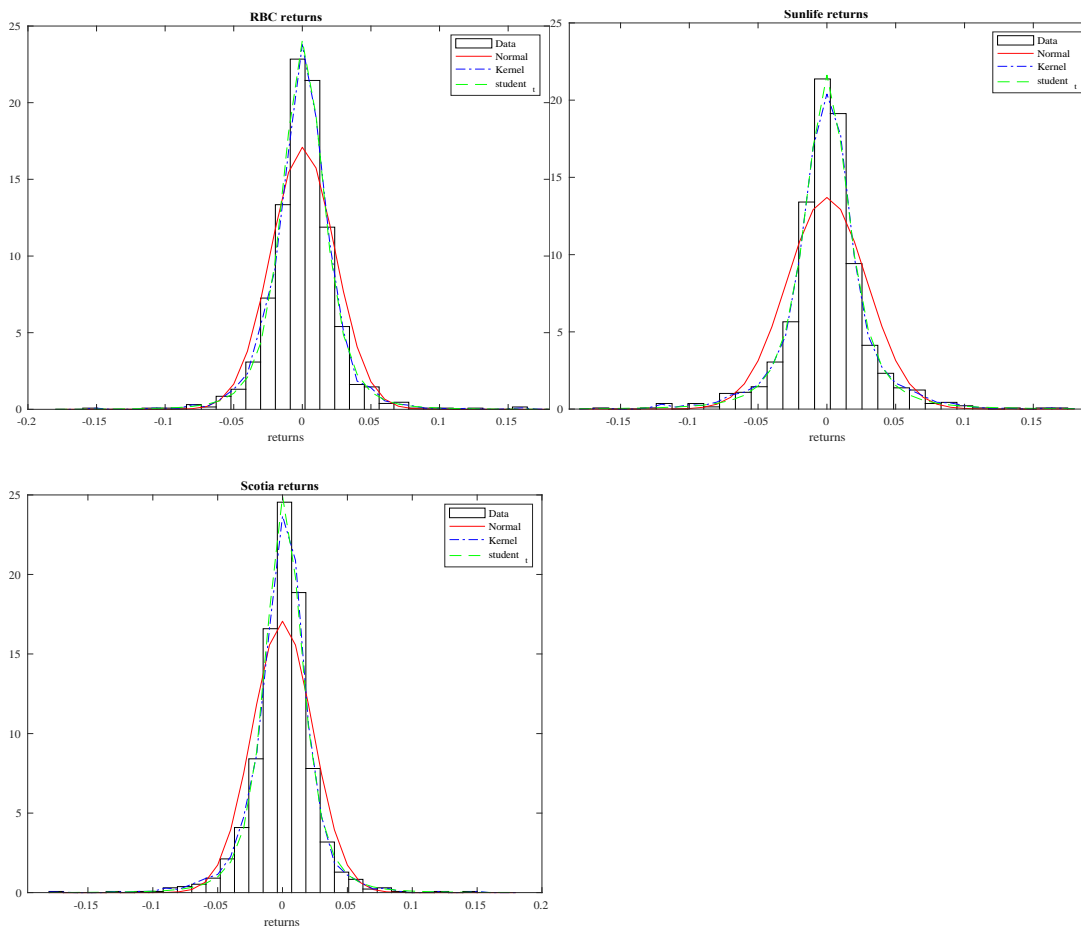


Figure 1 : Histogrammes des titres RBC, Scotia, Sun Life et densités normale, Student t, et kernel

¹ Voir l'annexe A11.1 équation (A23) de Hassani S. & Dionne G. (2023) disponible sur <https://chairegestiondesrisques.hec.ca/wp-content/uploads/2023/03/23-02.pdf>

Le tableau 2 montre les résultats de cette première optimisation où la VaR_a est la VaR absolue et la VaR_r est la VaR relative.

Le portefeuille B est le portefeuille qui minimise la CVaR à un degré de confiance de 95% et est obtenu en optimisant l'expression de CVaR suivante²:

$$CVaR = \frac{1}{p} \left\{ \sigma_{\text{portefeuille}} \times \phi_0(q_0) \right\} = \sqrt{\beta^T \Sigma \beta} \times \frac{\phi_0(q_0)}{p} > 0 \quad ,$$

sous la contrainte que les poids somment à 1. Les résultats sont représentés au tableau 3.

Pour les deux portefeuilles, nous constatons un faible poids alloué à Sun Life qui présente des VaR et CVaR plus élevés comparé aux deux autres titres. Nous remarquons aussi que la VaR du portefeuille A est inférieure à la somme pondérée des VaRs des trois titres. La CVaR du portefeuille est par définition inférieure à la somme pondérée des CVaRs des trois titres. Le principe de la diversification est donc respecté dans les deux cas.

Tableau 2: Matrices des corrélations, variances-covariances et moments non-paramétriques

		RBC	Sun Life	Scotia	Total	
Poids		0,5074554	0,0049872	0,4875573	1,00000	
Portefeuille	p = 5%	q ₀ = -1,64485				
Moyenne	0,02533%	0,05064%	0,00450%	-0,00079%		
Variance	0,05125%					
Écart type	2,26394%	2,33308%	2,91189%	2,33834%		
Asymétrie	-0,113943					
Kurtosis	9,047153					
	Portefeuille				Somme pondérée	Différence
VaRa 5%	3,69852%	3,78693%	4,78514%	3,84702%	3,82121%	-0,12268%
VaRr 5%	3,72386%	3,83757%	4,78964%	3,84623%	3,84654%	-0,12268%

² Voir l'annexe A11.1 équation (A24) de Hassani S. & Dionne G. (2023) disponible sur <https://chairegestiondesrisques.hec.ca/wp-content/uploads/2023/03/23-02.pdf>

Tableau 3: Minimisation de la CVaR (modèle normal)

	RBC	SunLife	Scotia	Total		
Poids	0,50756922	0,004541328	0,487889454	1,00000		
Portefeuille $p = 5\%$	$q_0 = -1,64485$					
					Somme pondérée	Différence
CVaR 5%	4,66986%	4,81247%	6,00640%	4,82333%	4,82319%	-0,15333%

Enfin, le tableau 4 montre les estimations des VaR et CVaR non paramétriques notés VaR_{np} et $CVaR_{np}$ respectivement. Le principe de la diversification est encore respecté.

4 Méthodologie³

4.1 Estimation de la VaR

La VaR peut être définie comme la perte en rendement maximale calculée à certain degré de confiance $(1-p)$ et pour une période donnée.

Elle peut être estimée par la méthode non paramétrique ou la méthode paramétrique. La VaR peut être calculée par rapport à zéro et on obtient alors la VaR absolue (VaR_a). Elle peut aussi être calculée par rapport à l'espérance mathématique $E(R)$ des rendements et dans ce cas, on obtient la VaR relative (VaR_r) tel que $VaR_r = E(R) + VaR_a$.

4.1.1 Méthode non paramétrique

La VaR peut être estimée de façon non paramétrique c'est-à-dire en ne posant aucune hypothèse sur la distribution des rendements. Il s'agit donc de se baser sur l'histogramme ou la fonction de densité des rendements sur une période définie. Pour estimer la VaR non paramétrique (VaR_{np}) à un degré de confiance $(1-p)$, il faut :

- 1) Classer les rendements par ordre croissant
- 2) Trouver l'ordre n du rendement qui correspond à la VaR_{np} en appliquant $n = \text{nombre d'observations} \times p$

³ Voir Annexes A3 à A5 de Hassani S. & Dionne G. (2023) pour les expressions des VaR et CVaR paramétriques. Disponible sur <https://chairegestiondesrisques.hec.ca/wp-content/uploads/2023/03/23-02.pdf>

La VaR_{np} correspond alors à n^{ième} valeur des rendements classés.

Tableau 4: Mesures non paramétriques des VaR et CVaR

	RBC	SunLife	Scotia	Total	
Poids B	0,50756922	0,004541328	0,487889454	1,00000	
Portefeuille p = 5%	q ₀ = - 1,64485				
				Somme	
				pondérée	Différence
VaR _{np} 5%	3,34374%	3,50436%	4,46593%	3,69259%	3,60056% -0,25682%
CVaR _{np} 5%	5,42979%	5,22021%	7,13600%	5,85952%	5,54082% -0,11103%

L'avantage de cette méthode est, comme mentionné précédemment, qu'il n'est pas nécessaire d'émettre des hypothèses sur la distribution des rendements. Cependant, il est important de s'assurer de couvrir une période de données suffisante pour obtenir une estimation fiable, mais pas trop longue pour éviter que les données ne représentent plus les conditions de marché réelles.

4.1.2 Méthode paramétrique

Cette méthode nécessite de faire une hypothèse sur la distribution des rendements.

La probabilité p qu'il y ait dépassement, c'est-à-dire que le rendement réalisé R soit inférieur à la VaR, est telle que :

$$\text{Prob}[R < -\text{VaR}] = \int_{-\infty}^{-\text{VaR}} f(R) dR = p \quad (1)$$

où f(R) représente la fonction de densité de la loi de distribution.

Au degré de confiance (1-p), l'expression de la VaR (positive) peut être déduite à partir de l'équation (1) pour chaque loi de distribution.

- Pour une distribution normale N(μ,σ) des rendements, l'expression de la VaR est :

$$\text{Var} = - (\mu + \sigma \Phi_0^{-1}(p)) \quad (2)$$

où Φ₀⁻¹(p) est la cumulative de la loi normale standard N(0,1).

- Pour une distribution Student t avec une moyenne μ, un écart-type σ, et un degré de liberté v. L'expression de la VaR est :

$$\text{Var} = - (\mu + \sigma F_v^{0-1}(p)) \quad (3)$$

où $F_v^{0-1}(\cdot)$ est l'inverse de la fonction de répartition réduite $F_v^0(\cdot)$.

- Pour un mélange de deux lois normales, le quantile q de la VaR est obtenu numériquement en minimisant $(F_m(q) - p)^2$ où $F_m(q)$ est la fonction de répartition du mélange telle que :

$$F_m(q) = \sum_1^2 c_i F_i(y), \quad (4)$$

et où c_i et $F_i(y)$ représentent respectivement la probabilité estimée de la densité $f_i(\cdot)$ et sa fonction de répartition.

4.2 Estimation de la CVaR

La VaR présente quelques problèmes parmi lesquels nous pouvons citer :

- Elle est une mesure non-cohérente. En finance, plus un portefeuille est diversifié, moins il est risqué. Cependant, il arrive parfois que la VaR d'un portefeuille soit supérieure à la somme pondérée des VaRs des actifs du portefeuille. La VaR ne respecte donc pas toujours la sous-additivité ou le principe de la diversification.
- Elle informe seulement sur la fréquence des dépassements mais pas sur les montants de perte dépassés.
- Pour les distributions discrètes, la VaR peut sous-estimer ou surestimer le risque.

La CVaR permet d'éviter ces limites ci-dessus. Elle peut être définie comme la moyenne des pertes supérieures à la VaR.

Soit r_T les rendements sur la période T . L'expression de la CVaR peut être exprimée comme suit :

$$\text{CVaR} = -E(r_T | r_T < -\text{VaR}) \quad (5)$$

Tout comme la VaR, la CVaR peut aussi être estimée par la méthode paramétrique et la méthode non paramétrique.

4.2.1 Méthode non paramétrique

Il s'agit simplement de faire la moyenne arithmétique des rendements inférieurs à la VaR. La CVaR non paramétrique sera notée CVaR_{np} tout au long de ce papier de recherche.

4.2.2 Méthode paramétrique

Cette méthode peut être utilisée lorsqu'on pose des hypothèses sur la distribution des rendements. Soient $f(\cdot)$ la fonction de densité des rendements r_T sur la période T et F^0 leur fonction cumulative réduite. $q < 0$ est le quantile de la VaR correspondant au degré de confiance $(1-p)$. L'expression générale de la CVaR est :

$$\begin{aligned} \text{CVaR} &= E[r_T | r_T < q] \\ &= \frac{1}{p} \left\{ \mu F^0 \left(\frac{q-\mu}{\sigma} \right) + \sigma \text{Tail}_{f^0} \left(\frac{q-\mu}{\sigma} \right) \right\}, \end{aligned} \quad (6)$$

où μ et σ sont respectivement les paramètres de location et de dispersion de la distribution concernée. $\text{Tail}_{f^0} = \int_{-\infty}^x t f(t) dt$ est la quantité « tail » de la densité $f(\cdot)$.

Pour une loi de distribution normale $N(\mu, \sigma)$ l'équation (6) devient :

$$\text{CVaR} = \frac{1}{p} \left\{ \mu \Phi_0 \left(\frac{q-\mu}{\sigma} \right) - \sigma \phi_0 \left(\frac{q-\mu}{\sigma} \right) \right\}, \quad (7)$$

où, Φ_0 et ϕ_0 sont respectivement la densité et la cumulative de la normale $N(0,1)$.

Pour la distribution t de Student avec un degré de liberté v , l'équation (6) devient :

$$\text{CVaR} = \frac{1}{p} \left\{ \mu F^0 \left(\frac{q-\mu}{\sigma} \right) - \sigma \frac{v + \left(\frac{q-\mu}{\sigma} \right)^2}{v-1} f^0 \left(\frac{q-\mu}{\sigma} \right) \right\}. \quad (8)$$

Pour un mélange de deux distributions normales $N(\mu_1, \sigma_1)$ et $N(\mu_2, \sigma_2)$, l'expression de la CVaR notée CVaR_m est :

$$\text{CVaR}_m = \frac{1}{p} \sum_1^2 c_i \left\{ \mu_i F_i^0 \left(\frac{q_m - \mu_i}{\sigma_i} \right) + \sigma_i \text{Tail}_{f_i^0} \left(\frac{q_m - \mu_i}{\sigma_i} \right) \right\} \quad (9)$$

où F_i^0 et f_i^0 sont respectivement les fonctions de densité et de répartition réduites de la loi de distribution i . c_i est la probabilité estimée de la densité $f_i(\cdot)$ et q_m le quantile correspondant à la VaR du mélange au degré de confiance $(1-p)$.

4.3 Estimation des coefficients des modèles paramétriques

Lors de cette étape, nous allons estimer les paramètres des 3 modèles et juger l'adéquation de chaque modèle. Pour se faire, nous allons :

- Comparer les valeurs paramétriques des VaR et CVaR aux valeurs non paramétriques

- Observer les critères de sélections AIC et BIC : le meilleur modèle sera celui qui aura la plus petite valeur AIC ou BIC.
- Comparer les moments supérieurs du modèle à ceux des données
- Utiliser le test de Kolmogorov-Smirnov : cela permettra de vérifier si les données proviennent d'une certaine distribution en comparant la fonction de répartition empirique à celle de la distribution théorique

4.4 Backtest des VaRs

Afin de tester la validité des modèles, nous allons effectuer deux tests: un test de couverture conditionnelle et un test de couverture non conditionnelle. Définissons d'abord la séquence des dépassements (*hits*) I_t :

$$I_t = \begin{cases} 1 & \text{si } r_T < -VaR_T \\ 0 & \text{si } r_T \geq -VaR_T \end{cases} \quad (10)$$

À un degré de confiance de $(1-p)$, une VaR a une bonne couverture lorsque la fréquence de dépassement est de p en moyenne. Un bon modèle doit aussi respecter l'indépendance des *hits* dans le temps.

4.4.1 Test de couverture non conditionnelle

Le premier test utilisé est le test de couverture non conditionnel de Kupiec (1995). Il teste si la proportion des dépassements $\pi = \frac{x}{T}$ est égale à p , où x est le nombre de dépassements et T est le nombre d'observations. L'hypothèse nulle de ce test est donc :

$$H_0: \pi = p$$

Et l'hypothèse alternative est :

$$H_1: \pi \neq p$$

La statistique du test est :

$$LR_{uc} = -2 \log \left[\frac{(1-p)^{T-x} - p^x}{\left(1 - \frac{x}{T}\right)^{T-x} \left(\frac{x}{T}\right)^x} \right]$$

Elle suit asymptotiquement une distribution χ^2 avec un degré de liberté de 1. La valeur p du test est :

Valeur $p = 1 - F(LR_{uc})$,

où F est la fonction cumulative d'une distribution χ^2 avec un degré de liberté de 1.

4.4.2 Test de couverture conditionnelle

Le deuxième test est le test de couverture conditionnelle développé dans Christoffen (1998) qui teste conjointement la couverture non conditionnelle et l'indépendance des *hits*. Commençons par définir le test d'indépendance des *hits*. L'hypothèse posée est que I_t suit un processus Markovien de premier ordre avec la matrice de transition suivante :

$$\Pi = \begin{pmatrix} 1 - \pi_{01} & \pi_{01} \\ 1 - \pi_{11} & \pi_{11} \end{pmatrix},$$

où π_{01} est la probabilité qu'il y ait dépassement à t étant donné qu'il n'y avait pas dépassement à $t-1$ c'est-à-dire $\Pr(I_t = 1 \mid I_{t-1} = 0)$, et π_{11} est la probabilité qu'il y ait dépassement à t étant donné qu'il y avait dépassement à $t-1$ c'est-à-dire $\Pr(I_t = 1 \mid I_{t-1} = 1)$.

Définissons aussi les quatre nombres suivants :

- N_{00} : nombre de périodes sans dépassements suivis par une période sans dépassement
- N_{10} : nombre de périodes avec dépassements suivis par une période sans dépassement
- N_{01} : nombre de périodes sans dépassements suivis par une période avec dépassement
- N_{11} : nombre de périodes avec dépassements suivis par une période avec dépassement

La statistique du test d'indépendance est :

$$LR_{ind} = -2 \log \left(\frac{(1-\pi)^{N_{00}+N_{10}} \pi^{N_{01}+N_{11}}}{(1-\pi_{01})^{N_{00}} \pi_{01}^{N_{01}} (1-\pi_{11})^{N_{10}} \pi_{11}^{N_{11}}} \right),$$

où $\pi = \frac{N_{01}+N_{11}}{N_{00}+N_{01}+N_{10}+N_{11}}$ est la probabilité estimée non conditionnelle qu'il y ait dépassement à t . LR_{ind} suit asymptotiquement une distribution χ^2 avec un degré de liberté de 1.

La statistique du test de couverture conditionnelle LR_{cc} est la somme de la statistique de couverture non conditionnelle et de la statistique du test d'indépendance des *hits*. Nous avons donc :

$$LR_{cc} = LR_{uc} + LR_{ind}$$

LR_{cc} suit une distribution χ^2 avec un degré de liberté de 2.

4.5 Backtest des CVaRs

Deux tests seront utilisés pour effectuer le backtest CVaRs : le backtest d'Acerbi et Szekely (2017) et le backtest de Righi et Ceretta (2015).

Les backtests sont effectués sur des rendements hors échantillons. Pour chaque rendement quotidien r_t dans notre échantillon, nous prenons les 250 rendements précédant ce jour pour estimer les paramètres du modèle concerné, à savoir une normale, une Student-t, ou deux normales. Pour chaque jour $t=1\dots 1200$ et pour chaque modèle, nous obtenons donc un vecteur θ_t des paramètres estimés. La $VaR_{p,t}$ et la $CVaR_{p,t}$ sont finalement calculées à partir de θ_t , pour le jour t et au degré de confiance $(1-p)$. Pour chaque modèle, nous obtenons donc une série de 1200 VaRs et une série de 1200 CVaRs.

4.5.1 Backtest d'Acerbi et Szekely (2017)

La statistique développée par Acerbi et Szekely (2017) et notée Z_{es} est :

$$Z_{es}(r_t) = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T \frac{p \times (CVaR_{p,t} - VaR_{p,t}) + (r_t + VaR_{p,t}) \times I_t}{p \times CVaR_{p,t}}, \quad (11)$$

où I_t est tel que défini précédemment.

L'hypothèse nulle du test est :

$$H_0 : Z_{es}(r_T) = 0$$

et l'hypothèse alternative est

$$H_0 : Z_{es}(r_T) \neq 0$$

Contrairement à la statistique Z_2 développée dans d'Acerbi et Szekely (2014), la statistique Z_{es} est peu sensible aux erreurs d'estimation de la VaR, sauf s'il s'agit d'une très grande erreur. Elle permet donc d'éviter des erreurs de type I et de type II.

La distribution de $Z_{es}(r_T)$ sous l'hypothèse nulle est inconnue, mais nous pouvons la simuler en suivant les étapes suivantes :

- 1) Pour chaque modèle et pour chaque jour t , effectuer un tirage de $N = 5000$ valeurs aléatoires à partir des paramètres θ_t estimés du modèle. On obtient alors une matrice de 1200 colonnes et 5000 lignes notée $\{Y_t^n\}$ où chaque ligne $n=1, \dots, 5000$ représente une trajectoire possible des rendements.
- 2) Appliquer l'équation (11) en remplaçant r_T par Y_t^n . On obtient alors une série de 5000 valeurs $Z_{es}(Y_t^n)$, $n=1, \dots, 5000$.

La valeur p du test est égale à $\min [\Pr (Z_{es}(Y_t^n) < Z_{es}(r_t)), \Pr (Z_{es}(Y_t^n) > Z_{es}(r_t))]$.

4.5.2 Backtest de Righi et Ceretta (2015)

La statistique RC proposée par Righi et Ceretta (2015) est :

$$RC(r_t) = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T \frac{(r_t + CVaR_{p,t}) \times I_t}{SD_{p,t}} \quad (12)$$

où $SD_{p,t} = (\text{Variance}(r_t \times I_t))^{1/2}$ est l'écart type des rendements qui dépassent la VaR au degré de confiance $(1-p)$. Étant donné que l'expression de la CVaR dans l'équation (5) est la valeur espérée d'une distribution tronquée qui a comme limite supérieure la VaR, ils ont jugé nécessaire de considérer la dispersion autour de cette espérance, qui est $SD_{p,t}$, pour le backtest de la CVaR.

La distribution de $RC(r_t)$ sous l'hypothèse nulle est aussi inconnue. Nous allons donc utiliser le même procédé utilisé pour Z_{es} .

5 Résultats

5.1 Estimation des paramètres des modèles paramétriques

Nous allons estimer les paramètres des trois modèles avec les rendements du portefeuille B comme référence. Les VaR et CVaR calculés sont absolues.

Les résultats des estimations des paramètres des différents modèles paramétriques sont représentés aux tableaux 5,6 et 7 pour la loi normale, la loi Student-t, et le mélange de deux lois normales, respectivement.

Pour la loi normale, nous observons une VaR supérieure à la VaR non paramétrique et une CVaR largement inférieure à la CVaR non paramétrique. Contrairement à la loi normale qui est symétrique avec un kurtosis de 3, les données

montrent une légère asymétrie négative et des queues plus épaisses. Le test de Kolmogorov-Smirnov est aussi rejeté avec une valeur p nulle.

En supposant une distribution Student-t, les VaR et CVaR estimées se rapprochent des valeurs non paramétriques. La CVaR de ce modèle est, parmi les trois modèles étudiés, celle qui se rapproche de $CVaR_{np}$. Les critères de sélection AIC et BIC se sont aussi améliorés en étant plus petit, et le KS test n'est pas rejeté. Avec une asymétrie nulle et un kurtosis indéfini, il n'y a pas d'amélioration par rapport aux moments supérieurs.

Avec un mélange de deux lois normales pour ce troisième modèle, nous trouvons la VaR la proche de la VaR_{np} avec une différence d'environ 0,02% comparée à des différences de 0,35% et 0,10% pour les distributions normales et Student-t respectivement. Cependant, on note une CVaR nulle et donc largement différente de la CVaR non paramétrique. Le test de KS ne rejette pas ce modèle, et les coefficients d'asymétrie et de kurtosis sont ceux qui se rapprochent le plus de ceux des données. Les critères de sélections AIC et BIC restent meilleurs que ceux de la loi normale, mais ne se sont pas améliorés comparés à la loi Student-t.

Tableau 5 : 1 Normale

Paramètres M1		Loi normale (1:NO)		p = 5%		Ordre : 61	
μ	0,0002534	Quantiles, coefficients et probabilités					
σ	0,0226394	q_p	μ	$\Phi[q_p]$	$-\sigma$	$\Phi[q_p]$	
		-1,644854	0,0002534	0,050000	-0,0226394	0,10313564	
VaR	3,69851%	VaR _{np} : 3,34374%				q	F _{modèle} [q]
CVaR	4,64452%	CVaR _{np} : 5,42979%				-3,69851%	0,050000
	<u>Modèle</u>	<u>Données</u>					
Asymétrie	0,0000	-0,1140	AIC: -5682,8990			KS stat	0,0776
Kurtosis	3,0000	9,0513	BIC: -5672,7188			KS p_value	0,0000

Tableau 6: 1 Student t

Paramètres M2		Loi t de student (1:T)			p = 5%	Ordre : 61	
μ	0,0008922	Quantiles, coefficients et probabilités					
σ	0,0143833	q_0	μ	$F_{T,\nu}^0[q_0]$	$-\sigma$	$Tail_{T,\nu}^0[q_0]$	
ν	3,1261202	-2,315156803	0,0008922	0,050000	-0,0143833	0,187535	
VaR	3,24075%	VaR _{np} : 3,34374%			q	F _{modèle} [q]	
CVaR	5,30553%	CVaR _{np} : 5,42979%			-3,24075%	0,050000	
	<u>Modèle</u>	<u>Données</u>					
Asymétrie	0,0000	-0,1140	AIC: -5953,4442		KS stat	0,0169	
Kurtosis	Indéfini	9,0513	BIC: -5938,1740		KS p_value	0,8756	

Tableau 7 : 2 Normales

Paramètres M3		Mélange de deux lois normales (2:NO)			p = 5%	Ordre : 61		
Loi 1	μ_1	0,0010826	Quantiles, coefficients et probabilités					
	σ_1	0,0002141	densité	q_0	μ	$\Phi[q_0]$	$-\sigma$	$\phi^0[q_0]$
	c_1	0,8274383	1	-162,1838448	0,0010826	0,000000	-0,0002141	0,000000
	μ_2	-0,0037227	2	-15,7473336	-0,0037227	0,000000	-0,0019000	0,000000
Loi 2	σ_2	0,0019000						
	c_2	0,1725617						
VaR	3,36426%	VaR _{np} : 3,34374%			q_m	F _{modèle} [q]		
CVaR	0,00000%	CVaR _{np} : 5,42979%			-3,36426%	0,000000		
	<u>Modèle</u>	<u>Données</u>						
Asymétrie	-0,1263	-0,1140	AIC: -5940,1103		KS stat	0,0216		
Kurtosis	10,3050	9,0513	BIC: -5914,6599		KS p_value	0,6204		

5.2 Backtests des VaR et CVaR

Tableau 8: Backtest des VaR et CVaR

p	Modèle	#Hits	uc p-value	cc p-value	Zes		RC	
					statistique	p-value	statistique	p-value
0,05	1 Normale	89	0,0003	0,0004	-0,3693	0,0000	-0,0190	0,0000
0,025		58	0,0000	0,0000	-0,5232	0,0000	-0,0145	0,0000
0,01		41	0,0000	0,0000				
0,05	1 Student	65	0,0000	0,0000	-0,2791	0,0008	-0,0019	0,2914
0,025		37	0,0000	0,0000	-0,2941	0,0032	-0,0002	0,3948
0,01		16	0,0037	0,0099				
0,05	2 Normales	24	0,0000	0,0000	6,28E+263	0,0000	-0,0564	0,2238
0,025		15	0,0022	0,0000	2,66E+131	0,0478	-0,0345	0,1824
0,01		7	0,1157	0,0269				

Nous effectuons les backtests de la VaR à 3 niveaux : 1% pour le backtest réglementaire, 2,5% et 5% à titre complémentaire et pour tester la robustesse de nos modèles.

Pour la VaR à 1%, seul le mélange de deux lois normales n'est pas rejeté par le test de couverture non conditionnelle, uc, car ayant une valeur $p > 10\%$ qui est le seuil critique de rejet. Cependant, le test de couverture conditionnelle cc rejette ce modèle. Toutefois, il présente une valeur p plus élevée que celles des deux autres modèles. Ce résultat pourrait être attendu puisque la VaR estimée du mélange de deux lois normales était la plus proche de la VaR_{np} à la section précédente. Le modèle Student-t est aussi rejeté, mais, il est une amélioration du modèle normal qui présente les valeurs p les plus basses (0,000) pour les tests uc et cc. Tous les trois modèles sont rejetés par uc et cc pour les VaR à 2,5% et 5%.

Nous avons aussi effectué les backtest de la CVaR à 2,5% à titre complémentaire étant donné qu'elle détermine le capital de couverture du risque de marché, mais également le backtest de la CVaR à 5% à titre complémentaire afin de tester la robustesse de nos résultats.

Le modèle 1 normale est rejeté par Zes et RC et présente une valeur p de 0. Le modèle Student-t est rejeté par Z_{es} pour la CVaR à 2,5% et 5%, mais il y a une amélioration par rapport au modèle 1 normale avec des valeurs p plus élevées. La loi de Student n'est cependant pas rejeté par RC avec des valeurs $p > 10\%$. Le même scénario se produit avec le modèle M3. Il est rejeté par Z_{es} pour la CVaR à 2,5% et la CVaR à 5%, mais accepté par RC.

En somme, aucun des trois modèles ne passe tous les backtests. Mais les distributions Student-t et le mélange de deux lois normales obtiennent de meilleurs résultats que la loi normale.

6 Conclusion

Nous avons procédé à un ensemble d'analyses visant la validation de modèle. Nous avons suivi une partie de la procédure de validation développée par Dionne et Saissi Hassani (2023) pour étudier l'adéquation des trois modèles utilisés (une normale, une Student t, et un mélange de deux lois normales) sur des données d'institutions financières et sur une période comprenant des fluctuations de prix importantes. Nous avons d'abord étudié la performance empirique de chaque modèle en nous basant sur différents critères, puis soumis chaque modèle au backtest réglementaire, mais aussi à des backtest supplémentaires tel que suggéré par le comité de Bale. Dans l'ensemble, le modèle normal est celui qui performe le moins. Cela confirme ce qui a été plusieurs fois démontré: la non-normalité des rendements. La Student t et le mélange de deux lois normales représentent mieux les données que la loi normale et obtiennent de meilleurs résultats aux backtests.

Nous pouvons donc confirmer que l'adéquation d'un modèle pour représenter des données est liée aux résultats de backtest de ces derniers.

Bibliographie

- Abad, P. et Benito, S. (2013). A detailed comparison of value at risk estimates. *Mathematics and Computers in Simulation*, vol.94, p.258-276. Lien : <https://doi.org/10.1016/j.matcom.2012.05.011>
- Acerbi, C. et Szekely, B. (2017). General properties of backtestable statistics. <http://dx.doi.org/10.2139/ssrn.2905109>.
- Artzner, P., Delbaen, J. M. Eber et D. Heath. (1999). Coherent measures of risk », *Mathematical finance*, vol.9, n°3, p. 203-228. Lien : <https://doi.org/10.1111/1467-9965.00068>.
- Basel Committee on Banking Supervision (2016). Minimum capital requirements for market risk. Standards Document, *Bank For International Settlements, (Basel)*, Lien : www.bis.org/bcbs/publ/d352.pdf.
- Basel Committee on Banking Supervision (2019). Minimum capital requirements for market risk. Revised Standards Document, *Bank for International Settlements, (Basel)*. Lien : www.bis.org/bcbs/publ/d457.pdf
- Christoffersen, P.F. (1998). Evaluating interval forecasts. *International Economic Review*, 39(4): 841–862. Lien : <https://doi.org/10.2307/2527341>
- Contreras, J., R., (2014). Market Risk Measures Using Finite Gaussian Mixtures . *Journal of Applied Finance and Banking*, vol.4, n°6, p. 29-45, Lien: <https://ssrn.com/abstract=2706616>
- Hassani S. et **Dionne** G. (2023). Using Skewed Exponential Power Mixture for VaR and CVaR Forecasts to Comply With Market Risk Regulation. *Journal of Risk*, vol. 25, pp. 73-103. Lien: <https://chairegestiondesrisques.hec.ca/wp-content/uploads/2023/03/23-02.pdf>
- Hendricks, D. et Hirtle, B. (1997). Bank Capital Requirements for Market Risk : The Internal Models Approach. *Economic Policy Review*, vol.3, n°4. Lien : https://papers.ssrn.com/sol3/papers.cfm?abstract_id=1016133
- Kawata, R. et Kijima, M. (2007). Value-at-risk in a market subject to regime switching. *Quantitative Finance*, vol.7, n°6, p. 609- 619. Lien : <https://doi.org/10.1080/14697680601161795>
- Kupiec, P.H. (1995). Techniques for verifying the accuracy of risk measurement models. *Journal of Derivatives*, 3(2):73–84. Lien : <http://dx.doi.org/10.3905/jod.1995.407942>

Olson, D. et Wu, D. (2013). The impact of distribution on value-at-risk measures.
Mathematical and Computer Modelling, vol.58, n°9-10, p. 1670-1676. Lien :
<https://doi.org/10.1016/j.mcm.2011.06.053>

Righi, M. et Ceretta, P.S. (2015). A comparison of expected shortfall estimation models.
Journal of Economics and Business, 78: 14–47. Lien :
https://papers.ssrn.com/sol3/papers.cfm?abstract_id=2274925